KUVAAJIEN TULKITSEMINEN JA KULMAKERROIN: TEORIAA SEKÄ TYYPILLISIMPIÄ VIRHEITÄ NIIDEN YMMÄRTÄMISESSÄ

Ida Mäkelä

Pro gradu -tutkielma
toukokuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MÄKELÄ, IDA: Kuvaajien tulkitseminen ja kulmakerroin: teoriaa sekä tyypillisimpiä virheitä niiden ymmärtämisessä
Pro gradu -tutkielma, 30 s.
Matematiikka
Kevät 2019

Työssä tarkastellaan graafisia esityksiä ja niiden tulkitsemisen osaamisen merkitystä opiskelussa sekä arkielämässä. Kuvaajat sekä kulmakertoimen käsite ovat keskeisessä asemassa tässä tutkielmassa. Työssä määritellään proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto sekä representaatioihin ja tiedon siirtämiseen liittyvää teoriaa, mitkä ovat tärkeitä palasia matemaattisen ajattelun tarkastelussa. Kuvaajien tulkitsemista sekä kulmakertoimen käsitettä tarkastellaan edellä mainittujen asioiden lisäksi myös opetussuunnitelman näkökulmasta.

Etenkin kuvaajien tulkitsemisesta ja niissä esiintyvistä virhekäsityksistä on tehty laajoja tutkimuksia, joihin tässä työssä perehdytään. Työn tarkoituksena on esitellä kuvaajien tulkitsemisen perusteita representaatioiden ja tiedon siirtämisen näkökulmasta. Samalla luetellaan yleisimpiä virheitä, joita oppilaat tekevät ja pohditaan syitä näihin. Kulmakerroin on keskeinen osa kuvaajien tulkitsemista ja sen vuoksi sitä tarkastellaan työn loppupuolella erikseen. Myös siihen liittyy paljon hankaluuksia, jotka osittain johtuvat kuvaajien tulkinnassa ilmenevistä ongelmista.

Yleisin virhe kuvaajien tulkitsemisessa on kuvaajan tulkitseminen kuvana, jolloin sen sisältämää informaatiota ei syvällisesti ymmärretä. Tällöin on myös hyvin vaikeaa ymmärtää kulmakertoimen merkitystä tai muuttujien välisiä vuorovaikutuksia. Toinen huomioitava asia on kulmakertoimen käsitteeseen liittyvät epämääräisyydet. Joko kulmakerroin ei kerro oppilaalle mitään tai sitten se osataan laskea, mutta ei osata perustella, mitä se esittää. Esimerkkinä tyypillisestä virheestä kulmakerrointehtävissä on kulmakertoimen ja kuvaajan korkeuden käsitteiden sekoittaminen. Lopuksi työssä kiinnitetään huomiota siihen, miten hankaluuksia voitaisiin saada vähennettyä, ja miten matematiikan soveltaminen muihin tieteisiin tulisi luonnollisemmaksi.

Asiasanat: matematiikka, kuvaajien tulkitseminen, kulmakerroin, tiedon siirtäminen.

Sisältö

1 Johdanto

Graafisten esitysten käyttäminen nyky-yhteiskunnassa on kätevää, sillä yksinkertaiselta näyttävään esitykseen saadaan mahtumaan paljon yksityiskohtaista informaatiota. Graafinen esitys voi olla esimerkiksi taulukko, diagrammi, kuvaaja, kaaviokuva tai kartta. Tässä työssä keskitytään kuvaajiin, niiden tulkitsemiseen sekä niiden ominaisuuksiin. Kuvaajat ovat keskeisiä etenkin matemaattisilla aloilla, sillä niiden avulla on mahdollista esittää monimutkaisia, muuttujien välisiä vuorovaikutussuhteita. Kuvaajan sisältämän informaation ymmärtämiseksi niitä on kuitenkin osattava tulkita. Kuvaajan tulkitsemistaitojen on havaittu olevan hyvin oppiainesidosteisia, jolloin toisessa aineessa käytettäviä prosesseja ei osata hyödyntää toisessa. Kuvaajien tulkitsemistaidoilla on suuri rooli sekä (luonnon)tieteissä että arkielämässä.

Lähemmässä tarkastelussa kuvaajan ominaisuuksista on kulmakerroin, sillä se on keskeinen työkalu kuvailemaan käyrän käyttäytymistä sekä matematiikassa että monessa muussa tieteessä. Kulmakertoimen ymmärtäminen, hahmottaminen ja sen määrittämisen osaaminen luovat pohjan monille muille matematiikan aloille, erityisesti differentiaali- ja integraalilaskennalle. Esimerkiksi luonnontieteissä se on keskeinen työkalu kuvaamaan luonnon riippuvuuksia, kuten kiihtyvyyttä tv-koordinaatistossa. [33]. Tässä työssä tarkastellaan kuvaajien tulkitsemista sekä tieteellisestä että todellisen maailman näkökulmasta. Kuvaajan tulkitsemistaitojen muodostuminen sekä soveltaminen eri konteksteihin luovat perustan tutkimukselle. Tämän lisäksi pohditaan kuvaajiin liittyviä representaatioita ja eri representaatioiden linkittämistä toisiinsa [30]. Toisaalta linkittämistä tarkastellaan myös isommassa mittakaavassa matematiikan ja muiden tieteiden välillä [17]. Näitä linkkejä sekä niiden puuttumista selitetään tutkielmassa tiedon siirtämisen näkökulmasta. Samalla listataan ja pohditaan oppilaiden yleisimpiä ongelmia, joita kuvaajien tulkitsemisesta sekä kulmakertoimen määrittämisestä aiheutuu.

Tutkielman alussa esitellään opetussuunnitelman näkökulmaa aiheesta sekä aiheeseen liittyviä matemaattisia käsitteitä. Joutsenlahti [14] sekä Haapasalo & Kadijevich [11] ovat tutkineet matemaattista ajattelua ja matemaattisen tiedon eri ulottuvuuksia. Näistä erityisessä tarkastelussa ovat konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto, representaatiot sekä tiedon siirtäminen. Tiedon siirtämistä tieteiden välillä on tarkasteltu tutkielmassa lähinnä esimerkkien avulla fysiikan ja kemian näkökulmasta. Edellä mainittujen käsitteiden avulla tarkastellaan aiempia tutkimustuloksia ja pohditaan niiden vaikutuksia kuvaajien tulkitsemisessa. Kontekstin vaikutusta tulkinnan onnistumiseen on tutkinut esimerkiksi Planinic kumppaneineen useaan otteeseen ja sitä tarkastellaan tässäkin tutkielmassa. Kuvaajien tulkitsemisesta siirrytään kuvaajan keskeiseen ominaisuuteen, kulmakertoimeen. Kulmakerroin esitetään määritelmänä [33] sekä käsitteenä [32, 34] ja pohditaan, miten eri käsitteiden käyttäminen vaikuttaa kulmakertoimen hahmottamiseen. Ongelmitta ei suju kuvaajien tulkitseminen eikä kulmakertoimen määrittäminenkään, joten näitä ongelmakohtia on esitelty tutkielman loppupuoliskolla. Lopuksi työssä tuodaan esille asioita, joihin tulisi kiinnittää enemmän huomiota opetuksessa, jotta kuvaajien tulkitsemistaitojen siirtäminen ja soveltaminen kontekstista toiseen olisi tehokasta ja luontevaa.

Tutkielman tavoitteena on esitellä, millaisia taitoja kuvaajien tehokkaaseen tulkitsemiseen tarvitaan ja millaisia hankaluuksia oppilailla esiintyy kuvaajien tulkitsemisessa sekä kulmakertoimen käsitteessä, sen laskemisessa sekä sen soveltamisessa erilaisiin konteksteihin. Samalla tavoitteena on löytää syitä näihin ongelmiin ja lopuksi tarkastellaan, miten kyseisiltä ongelmilta voisi välttyä. Tavoitetta lähestytään matemaattisen ajattelun, proseduraalisen ja konsenptuaalisen tiedon sekä representaatioiden näkökulmasta. Aluksi tutkielmassa esitellään käsitteitä, joiden pohjalta tarkastellaan edellä mainittuja asioita sekä aiempia tutkimuksia aiheesta. Kirjallisuuskatsauksen perustan luovat matematiikkaan liittyvät tutkimukset, joissa on esitelty perusteita ja syitä kuvaajien ja kulmakertoimien opiskelun tärkeydelle sekä perehdytään niissä esiintyviin vaikeuksiin. Oheismateriaalina tutkielmassa on käytetty fysiikkaan ja kemiaan pohjautuvia tutkimuksia, joissa on esitelty kattavasti tiedon siirtämisestä ja soveltamisesta johtuvia hankaluuksia. Nämä hankaluudet olisivat vaikeasti selitettävissä ilman esimerkkejä, joten on tutkielman etenemisen kannalta tärkeää ottaa huomioon myös tämä perspektiivi.

2 Graafiset esitykset ja kulmakerroin käytännössä

2.1 Graafisten esitysten ja kulmakertoimen osaamisen merkitys

Graafinen esitys on numeerisista tiedoista muodostunut visuaalinen esitys, joka voi olla esimerkiksi taulukko, diagrammi, kuvaaja, kaaviokuva tai kartta. Näistä taulukot ja diagrammit sopivat diskreettien muuttujien tapauksiin ja esittämiseen. Kaaviokuvat ja kartat ovat omiaan erilaisten tilanteiden, kokonaisuuksien tai suhteiden esittämiseen. Usean muuttujan välisiä riippuvuuksia on tehokkainta kuvata kuvaajien ja käyrien avulla, mistä yksinkertaisimmat ovat suora tai käänteistä verrannollisuutta kuvaava lineaarinen esitys. [1, 16]. Tyypillistä kaikille graafisille esityksille on, että tilastojen arvot ja suhdanteet ovat helposti ja nopeasti tulkittavissa ja tiiviisti esitettynä [36].

Juuri tämän vuoksi päivittäinen tiedonvälitys medioissa, opetusmateriaaleissa sekä tieteellisissä julkaisuissa on esitetty graafisesti.

Matemaattisilla aloilla erityisesti kuvaajat ja niiden sisältämät käyrät ovat keskeinen apuväline tutkimustulosten käsittelyssä ja esittämisessä. Kuvaajat ovat käteviä, sillä niiden avulla tilastoarvojen keskinäisten suhdanteiden esittäminen on helppoa. Ne helpottavat monimutkaisten riippuvuussuhteiden ymmärtämistä ja tulkitsemista. [1, 18]. Esimerkiksi fysikaalista tilannetta ja siinä esiintyviä vuorovaikutuksia on helpompi tulkita kuvaajasta kuin taulukon arvoista. Vaikka kuvaaja näyttää helpolta ja yksinkertaiselta, se sisältää suuren määrän informaatiota ja sitä on osattava tulkita [3]. Juuri tässä tuleekin esille käyrien ainutlaatuisuus, sillä ne ovat toisaalta kvalitatiivisesti helposti tulkittavia, mutta niistä saadaan myös tarkasteltua yksittäisiä pisteitä kvantitatiivisesti [1]. Tämä seurauksena matematiikan ja luonnontieteiden opiskelussa laaditaan ja tulkitaan erilaisia kuvaajia kaikilla kouluasteilla. Kuvaajien käyttäminen ja niiden tarkoitus vaihtelevat eri aloilla. Esimerkiksi matematiikassa, niitä käytetään kuvaamaan funktioita eli muuttujien välisiä riippuvuuksia, kun taas fysiikassa ja kemiassa kuvaajien avulla ennustetaan muuttujien välisiä suhteita, esitetään tutkimustuloksia graafisesti sekä sovitetaan tuloksia matemaattisten mallien mukaisiksi. [16, 17].

Matemaattisissa tilanteissa keskeisessä osassa kuvaajien tulkitsemisessa on kulmakertoimen käsitteen hahmottaminen, ymmärtäminen ja soveltaminen. Stanton ja Moore-Russo [32] ovatkin luonnehtineet kulmakerrointa voimakkaaksi yhdistämiskonseptiksi, joka auttaa oppilaita ymmärtämään funktioita sekä niiden kuvaajia. Se kertoo tulkitsijalle kuvaajan käyttäytymisestä, miten sen suhdanteet vaihtelevat ja kuinka nopeasti. Sen lisäksi kulmakertoimella on suuri merkity muissa luonnontieteissä sekä arkielämässä. Luonnontieteissä sen avulla on mahdollista kuvata ja havainnollistaa luonnon riippuvuuksia. Arkielämässä taas se saattaa kuvastaa vaikkapa mäen jyrkkyyttä tai talouden suhdanteita. [3, 16].

2.2 Graafinen esitys ja kulmakerroin opetussuunnitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman [23] mukaan opetuksen keskeisiä tavoitteita kaikilla vuosiluokilla on oppilaiden laaja yleissivistäminen, mikä edellyttää tietoja ja taitoja eri tieteenaloilta. Opetussuunnitelma korostaa tiedonalat yhdistäviä taitoja sekä laaja-alaista osaamista. Laaja-alaiseen osaamiseen sisältyy monilukutaito, jolla tarkoitetaan erilaisten tekstien ja viestinnän tulkitsemisen ja tuottamisen taitoja. Laaja käsitys teksteistä viittaa "sanallisten, kuvallisten, auditiivisten, numeeristen ja kinesteettisten symbolijärjestelmien sekä näiden yhdistelmien avulla ilmaistuun tietoon". Jokaisessa oppiaineessa on tavoitteena harjoitella näitä taitoja oppiaineelle tyypillisillä tavoilla. Graafisten esitysten tulkitsemistaitoja edellyttää myös opetussuunnitelmassa korostettu medialukutaito.

Graafisten esitysten tulkitsemiseen ja laatimiseen liittyviä asioita sisältyy yläkoulun opetuksen tehtäviin kaikissa luonnontieteissä. Matematiikassa yksi opetuksen tavoitteista vuosiluokilla 7-9 on: *T15 Ohjata oppilasta ymmärtämään muuttujan käsite ja tutustuttaa funktion käsitteeseen. Ohjata oppilasta harjoittelemaan funktion kuvaajan tulkitsemista ja tuottamista.* [23]. Opetuksen tehtävänä on opetussuunnitelman [23] mukaan antaa oppilaalle valmiudet matemaattiseen mallintamiseen ja ratkaisemiseen. Tavoitteissa mainitaan tämän lisäksi funktioissa olevien muuttujien välisten vuorovaikutuksien osaaminen sekä graafisesti että algebrallisesti. Tässä korostuu vakion ja muuttujan erottaminen toisistaan sekä funktion, kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteiden hallitseminen. Tämän lisäksi siinä korostetaan, että oppilasta on ohjattava havaitsemaan ja ymmärtämään oppimiensa asioiden välisiä yhteyksiä.

Kuvaajien tulkinta ja kulmakertoimen käsitteen ymmärtäminen kuuluvat keskeisesti opetussuunnitelman sisältöihin, mutta sen lisäksi siinä korostetaan myös sekä ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä että matematiikan soveltamista. Kulmakertoimen merkitys matematiikassa korostuu siis siksi, että sitä tarvitaan myös monien eri alojen "kentillä". Naglen, Moore-Russon, Vigliettin & Martinin [21] mukaan sen osaaminen ja ennen kaikkea ymmärtäminen on tärkeä edellytys kehittyneeseen matemaattiseen ajatteluun sekä sen avulla on mahdollista ratkaista siihen liittyviä ongelmia myös muissa konteksteissa. Kulmakertoimen konseptuaalinen ymmärrys on myös ratkaiseva tekijä differentiaali- ja integraalilaskennassa sekä fysiikassa [33].

3 Matemaattinen ajattelu

Matematiikan opetuksen tehtävänä on ohjata oppilasta ajattelemaan matemaattisten käsitteiden yhteyksiä laajemmissa kokonaisuuksissa [23]. Matemaattinen tieto voidaan jakaa kahteen eri osaan, konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon. Representaatiot, jotka toimivat matemaattisen ajattelun apuvälineinä, sekä tiedon siirtäminen ovat keskeisiä osa-alueita juuri laajempien kokonaisuuksien hahmottamisessa. Tässä luvussa on esitelty näitä tarkemmin, minkä tarkoituksena on tuoda tutkimukseen ymmärrettävyyttä.

3.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Proseduraaliselle ja konseptuaaliselle tiedolle on olemassa monia määritelmiä, esimerkiksi Haapasalo [10] on määritellyt konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon julkaisussaan "Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää?". Konseptuaalinen tieto määritellään siinä seuraavasti:

> ”Konseptuaalinen tieto on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan.”

Konseptuaalinen tieto rakentuu periaatteiden ja käsitteiden ymmärtämisestä. Se sisältää myös kyvyn ymmärtää niiden välisiä suhteita ja taidon soveltaa niitä erilaisissa konteksteissa. Konseptuaalista tietoa ei voi saavuttaa ulkoa opettelemalla, vaan uusi tieto kehittyy, kun tiedon eri sisältöjä ja riippuvuuksia jäsennellään. [11].

Proseduraalisen tiedon määritelmä Haapasalon [10] mukaan:

> Proseduraalinen tieto tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.”

Proseduurilla tarkoitetaan vaihe vaiheelta tehtyä matemaattista algoritmia, jossa jokainen on tehtävä ennen seuraavaan vaiheeseen etenemistä [9]. Proseduurien jono tehtävän annon ja tehtävän vastauksen välillä muodostaa matematiikan koulutehtävän ratkaisun [14]. Tämän määritelmän perusteella proseduraalinen tieto koostuu tiedoista ja taidoista käyttää matemaattisia operaatioita sekä algoritmeja. Toisin sanoen se sisältää matemaattiset keinot, joilla ratkaistaan matemaattisia ongelmia sekä suoritetaan laskutoimituksia. Haapasalo & Kadijevich [11] ovat tutkineet, että proseduraalista tietoa on mahdollista kerryttää ja ylläpitää laskurutiineilla, jolloin tietoa on helppo palauttaa mieleen ja soveltaa. Proseduraalista tietoa mitataan pääasiassa tavallisilla kokeilla, jotka sisältävät hyvin määriteltyjä tehtäviä. Näillä pystytään mittaamaan oppilaan taitoja hallita erilaisia operaatioita symboleita käyttämällä sekä ongelmanratkaisutaitoja jollakin proseduurijonolla. [14].

3.2 Representaatiot

Representaatiot määritellään usein ajattelun apuvälineenä. Ne muodostuvat ja rakentuvat niiden käyttämisen myötä. Representaatioita syntyy, kun jokin matemaattinen rakenne esitellään eri esitysmuodossa kuin tavallisesti [20]. Hähkiöniemi [13] jakaa representaatiot ulkoisiin ja sisäisiin representaatioihin. Sisäinen representaatio koostuu mentaalisesta kuvasta ja ulkoinen konkreettisesta rakenteesta. Esimerkiksi jonkin funktion kuvaaja yksilön mielessä on sisäinen ja paperille piirrettynä se on ulkoinen representaatio. Aina ei kuitenkaan ole niin, että ulkoinen puoli on vain sisäisen heijastus, mutta näiden yhteys on edellytys sille, että representaatiota voi käyttää tehokkaasti.

Konseptuaalisessa tiedossa ja sen rakentumisessa muodostetaan yhteyksiä eri representaatioiden välille. Proseduraalisessa tiedossa yleensä käytetään jotakin yhtä representaatiota. Representaatioita voidaan muuttaa toisiksi ja vaihdella eri operaatioiden avulla. Useiden representaatioiden käyttäminen auttaa konseptuaalisen tiedon kehittymisessä. [11, 24].

Tässä työssä representaatioita tarkastellaan matematiikan, ja etenkin kuvaajien sekä kulmakertoimen, näkökulmasta. Matematiikassa opetetaan taitoja, joiden avulla voidaan muotoilla sekä tulkita taulukoita, kuvaajia ja kaavoja. Nämä taidot ovat oppilaalla ikään kuin työkaluina, joita tarpeen vaatiessa voi käyttää. Juuri näitä työkaluja kutsutaan representaatioiksi, joita oppilas käyttää konseptuaalisen tiedon rakentamiseksi. [30].

Potgieter, Harding ja Engelbrecht [30] tarkastelevat tutkimuksessaan algebrallisen sekä graafisen tiedon siirtämistä sekä representaatioiden merkitystä sen onnistumisessa. Kuvaajiin liittyvät representaatiot ovat tärkeitä, sillä ilman niitä olisi vaikeaa hahmottaa muuttujien välisiä suhteita yhtä tarkasti. Kuvaajista on mahdollista havaita visuaalisesti sekä suuria määriä tietoja että hyvinkin yksityiskohtaisia asioita. Kun oppilas rakentaa tai tulkitsee kuvaajaa, hän rakentaa representaatioita siitä, mitä näkee ja yhdistää niitä jo valmiina oleviin representaatioihinsa. Näin hän pyrkii laajentamaan ymmärrystään asiasta. Representaation laajentaminen ja kehittäminen johtaa oppimisprosessiin. Eri oppilaan tulkitessa samaa kuvaajaa, saattaa hänellä "aktivoitua" täysin erilaisia representaatioita. Representaatiot voivatkin esittää täysin erilaisia asioita eri ihmiselle.

Esimerkkinä tästä on oppilas, joka käyttää kuvaajan jyrkkyyttä funktion kulmakertoimen/derivaatan representaationa. Sillä tarkoitetaan, että jyrkkyys on työkalu, jonka avulla oppilas hahmottaa ja oivaltaa funktion käyttäytymistä, kuten sen maksimikohdan (derivaatan nollakohta). Oppilaan käsitys kulmakertoimesta ja derivaatasta on muodostunut ja muotoutuu edelleen representaatioiden käyttämisen myötä. Representaation ulkoinen puoli voi olla tässä tilanteessa vaikkapa paperille piirretty kuvaaja, jonka jyrkkyyden voi silmin havaita. Se sisältää myös sisäisen puolen, sillä kaikille ihmisille saman kuvaajan näkeminen paperilla ei tuo mieleen derivaattaa. [13, 30].

Sisäisen ja ulkoisen representaation yhteyden lisäksi tässä työssä ollaan kiinnostuneita graafisten ja algebrallisten representaatioiden välisistä vuorovaikutuksista. Potgieter ym. [30] esittelevät kaksi erilaista lähestymistapaa funktioiden tarkasteluun: prosessiperspektiivin ja objektiperspektiivin. Prosessilla viitataan algebralliseen ja objektilla graafiseen perspektiiviin. Prosessiperspektiivistä katsottuna funktion ajatellaan olevan linkki x- ja y-arvojen välillä. Sijoittamalla jonkin x-arvon lausekkeeseen, saadaan selville y-arvo. Objektiperspektiivi sen sijaan tarkoittaa, että funktio nähdään itsenäisenä kokonaisuutena. Funktion kuvaaja on objekti, jota voidaan liikuttaa esimerkiksi peilaamalla tai kiertämällä. Funktion käsitteen syvä, konseptuaalinen ymmärrys, voi syntyä vain, jos sitä tarkastellaan objektiperspektiivistä.

Käytetystä perspektiivistä huolimatta oppilaalle syntyy sekä graafisia että algebrallisia representaatioita, jotka usein jäävät erillisiksi. Jotta konseptuaalista tietoa rakentuisi, oppilaalla on oltava vahvoja aiempia representaatioita, joihin uutta informaatiota on mahdollista yhdistää. Tähän vaikuttaa olennaisesti se, että oppilas hahmottaa, mitä on kuvattuna (funktio) ja miten (funktion kuvaajan tulkitseminen). [1, 30].

3.3 Tiedon siirtäminen

Tiedon siirtäminen (transfer of knowledge) perustuu siihen, että tietoa pystytään siirtämään tilanteesta ja kontekstista toiseen ja se pystytään liittämään uuteen tilanteeseen, jossa sille on tarvetta [30]. Tämä tarkoittaa kognitiivisten tapahtumien aktivoitumista. Tieto nähdään työvälineinä, jotka on varastoituna oppijan muistiin ja niitä voidaan tarpeen vaatiessa käyttää. Oppijan on siis osattava käyttää oikeaa työvälinettä oikeaan aikaan. Toisaalta jotkut tutkijat esittävät, että oppijan kognitiiviset prosessit rakentuvat kontekstin, oppijan aktiivisuuden, työvälineiden ja niiden vuorovaikutuksen mukaan. On näin ollen mahdollista, että oppija osaa käyttää jotakin matematiikassa oppimaansa oikean elämän tilanteissa, mutta ei osaa rakentaa siitä mitään yleistä periaatetta [2, 16, 26].

Tiedon siirtäminen tapahtuu usein tilanteessa, jossa jotakin opittua voidaan hyödyntää jonkin uuden asian oppimisessa. Varsinkin proseduraalinen tieto siirtyy tällä tavalla. Konseptuaalisen tiedon tapauksessa tiedon siirtäminen tai siirtämisen onnistuminen ei ole yhtä selvää. [30].

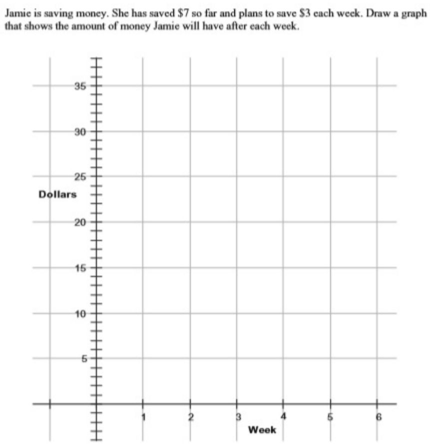
Matematiikassa tämä tarkoittaa, että vanhoja tietoja voidaan käyttää yleisenä kehyksenä yksityiskohtaisempien uusien tietojen sisällyttämiseen ja oppimiseen. Tiedon siirtyminen matematiikassa ja etenkin matematiikasta sen ulkopuolelle on kuitenkin havaittu olevan hankalaa. Aiempien esimerkkien sisältämiä abstrakteja tietoja ei välttämättä osata käyttää. Vanhoista esimerkeistä mieleen muistuu asioita, joilla on erityisiä yhtäläisyyksiä eikä asioita, joilla on yhteinen rakenne uuden asian kanssa. [30].

4 Kuvaajat

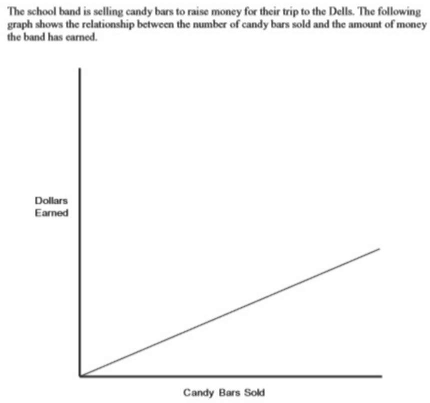
4.1 Kuvaajien tulkitseminen

Kuvaaja on symbolinen esitysmuoto muuttujien välisille suhteille. Kuvaaja näyttää yksinkertaiselta, mutta usein graafinen esitys sisältää paljon informaatiota, jonka saavuttamiseksi on osattava tulkita sitä. [3, 16]. Kuvaajan tulkitseminen tarkoittaa, millaisia toimintoja käytetään, jotta saadaan selville, mitä tilannetta tai riippuvuussuhdetta kuvaaja esittää. Tulkitsija (usein oppilas) siis antaa kuvaajalle merkityksen ja sisällön, mitkä pohjautuvat hänen omiin representaatioihinsa. [17]. Huomionarvoista on myös kyky kiinnittää huomio olennaisiin, katsojan kannalta tarpeellisiin, yksityiskohtiin. Tulkinta voi olla globaalia tai lokaalia, sekä kummassakin tapauksessa joko kvalitatiivista tai kvantitatiivista. Kuvaajan tulkitseminen globaalisti keskittyy koko kuvaajaan ja lokaali sen sijaan kiinnittää huomion yksittäiseen pisteeseen. [16]. Hattikudur ym. [12] määrittelevät tutkimuksessaan kvantitatiivisen sekä kvalitatiivisen kuvaajan. Kvantitatiivisella eli määrällisellä tulkinnalla viitataan täsmällisyyteen sekä laskennallisuuteen ja kvalitatiivisella eli laadullisella tulkinnalla suurempiin linjoihin sekä kokonaisuuksiin. Kvalitatiiviset kuvaajat eivät sisällä muuttujien tarkkoja arvoja eivätkä muutakaan numeerista informaatiota. Akselit voivat olla määriteltyjä, esimerkiksi viikkojen tai ansaitun rahan mukaan, jolloin oppilaan on keskitynyttävä yleisiin suhdanteisiin sekä kokonaisuuteen tulkitakseen kuvaajaa ja muuttujien välisiä vuorovaikutuksia. Kvantitatiivisissa kuvaajissa muuttujat saavat tarkkoja arvoja ja niistä voidaan määrittää numeerisesti esimerkiksi kulmakerroin ja y-akselin leikkauspiste. Kuvissa 1 ja 2 esimerkit molemmista tapauksista

Kuvaajaa tulkittaessa tulkitsijalla on kaksi ulottuvuutta, joiden välillä hän liikkuu mielessään: piirretty kuvaaja ja kuvaajan esittämä tilanne. Näiden lisäksi matemaattisiin kuvaajiin yhdistyy kolmas ulottuvuus, matemaattinen malli. Funktio kuvastaa matemaattista mallia, jonka perusteella kuvaaja on muodostunut/muodostetaan. Algebrallisen ajattelun (matemaattinen malli) ja graafisen ajattelun (kuvaajan) välillä tapahtuva liikkuminen on lähes aina kuvaajan kvantitatiivista tulkitsemista. [31]. Kun kuvaajan avulla on esitetty jokin konkreettinen tilanne tai tapahtuma, tulkinta tapahtuu usein kvalitatiivisesti. Tulkitsija tarkastelee tapahtuman visuaalista mielikuvaa sekä symbolista esitystä ja liikkuu näiden ulottuvuuksien välillä. On myös mah-



Kuva 1: Kvantitatiivinen kuvaaja [12]



Kuva 2: Kvalitatiivinen kuvaaja [12]

dollista, että yhtä kuvaajaa tarkasteltaessa käytetään kaikkia ulottuvuuksia yhtä aikaa. [17].

Kuvaajien tulkitseminen voidaan jakaa erilaisiin osiin sen mukaan, kuinka syvällisesti niitä tulkitaan. Osa-alueet ovat: yksittäisen pisteen koordinaattien lukeminen, käyrän interpoloiminen ja ekstrapoloiminen, muuttujien välisen suhteen ymmärtäminen sekä kahden käyrän informaation yhdistäminen. Osa-alueilla tapahtuvat toiminnot ja tulkinnat voivat olla joko kvalitatiivisia tai kvantitatiivisia. Esimerkiksi kuvaajan kulmakerrointa voidaan tulkita kvalitatiivisesti muutosnopeutena jollakin hetkellä suhteessa muuhun kuvaajaan tai kvantitatiivisesti tarkasti laskemalla sen arvo. [17, 18]. Kuvaajien hahmottamista voidaankin tarkastella osa-alueittain niiden haastavuuden perusteella. Frielin [6] mukaan on olemassa kolmen tasoisia kognitiivisia edellytyksiä, jotta oppilas osaa tulkita graafista representaatiota: kuvaajan datan lukeminen, datan välistä lukeminen sekä datan ohi lukeminen. Glazer [7] on antanut esimerkkejä edellä mainituista tasoista teoksessaan *Challenges with Graph Interpretation: A Review of the Literature*. Kuvaajan datan lukemisella tarkoitetaan pisteiden koordinaattien lukemista, mikä on kaikista helpoin tehtävätyyppi. Tämän tyyppisisissä tehtävissä haluttu informaatio on esitetty kuvaajassa selvästi ja tulkitsijan tarvitsee vain osata löytää piste kuvaajalta ja lukea sen arvot. Kysymys voisi olla esimerkiksi "Kuinka monta autoa myytiin vuonna 1980?". Keskimmäisellä tasolla tulkitsija osaa interpoloida ja tulkita muuttujien välisiä suhteita, esimerkiksi vastata kysymykseen "Mikä on autojen myynnin ja moottorin koon välinen suhde vuosina 1970-1985?". Viimeisellä, korkeimmalla, tasolla ekstrapoloidaan sekä analysoidaan kuvaajan ulkopuolista tietoa. Esimerkkinä tästä on kysymykset, "Kerro autojen myynnin vaihteluista kahden moottorin koon välillä." tai "Millainen sää on huomenna?".

Planinic, Milin-Supus, Katic, Susac & Ivanjek [25] määrittelevät avaruudellisen hahmotuskyvyn (spatial ability) intuitiona muodoista ja niiden välisistä suhteista eli kykynä luoda, säilyttää, hahmottaa ja muokata visuaalisia "kuvia". Avaruudellinen hahmottaminen edesauttaa kuvaajien tulkitsemista. Avaruudellinen hahmotuskyky on tärkeää myös luonnontieteissä. Se vaikuttaa oppilaan kykyyn ratkaista esimerkiksi fysiikan ongelmia, jotka sisältävät avaruudellisia muuttujia. Sen on havaittu myös vaikuttavan ihmisen kykyyn sisäistää konseptuaalista tietoa, sillä avaruudellinen hahmotuskyky voi vahvistaa ihmisen kykyä oppia.

Tulkitsijan kognitiivinen kyvykkyys vaikuttaa siis olennaisesti tulkintaan. Kuvaajan tulkitseminen onnistuu, jos oppilas osaa tunnistaa systeemin ominaisuudet. Tällä tarkoitetaan sekä yksityiskohtien löytämiseen liittyviä että kokonaisuuksien hahmottamiseen liittyviä ominaisuuksia. Representaatioilla ja niiden käyttämisellä, mielikuvilla sekä muistilla on myös oma osansa vaikuttamassa tulkitsemisessa [18]. Ennakkokäsitykset ja konseptuaalinen tieto kuvaajan käsittelemästä aihealueesta sekä matematiikasta luovat pohjan, jonka avulla tulkitsija rakentaa lopputuloksen. Jos lopputulos on samanlainen kuin tulkitsijan aiemmat aiheeseen liittyvät representaatiot, vahvistuvat ne edelleen. On kuitenkin myös mahdollista, että lopputulos eroaa ennakkokäsityksistä. Tällöin tulkitsija muokkaa aiempia representaatioitaan ja kumoaa aiemmat ennakkokäsityksensä. Tulkinta nähdään siis prosessina, jossa omaa tietoaan on mahdollista kerryttää tai muokata vastaamaan tilannetta. [16, 17].

Tehtävätasolla onnistunut tulkinta edellyttää, että tunnistaa akseleiden yksiköt sekä osaa tulkita kuvaajan käyttäytymistä. Tämä vaatii avaruudellista hahmotuskykyä sekä formaalista operationaalista päättelyä. Kuvaajan sisältämää tietoa on hankala tulkita, jos tulkitsijalle ei ole kehittynyt tarvittavaa loogista päättely- ja hahmottamiskykyä. Oppilaan loogisen päättelykyvyn ja kuvaajien tulkitsemisen välillä onkin havaittu olevan positiivinen korrelaatio. Jos hahmottamiskyky ei ole tarpeeksi kehittynyt, kuvaaja nähdään visuaalisesti pelkkänä kuvana ja sen ominaisuuksia ei osata tulkita. [16, 25].

4.2 Tiedon siirtyminen algebrallisen ja graafisen ajattelun välillä

Leinhardtin [17] mukaan funktioiden sekä kuvaajien tulkitsemisessa algebralliset ja graafiset representaatiot ovat hyvin erilaiset ulottuvuudet, joita yhdistämällä voidaan määritellä matemaattisesti funktion käsite. Funktioita sekä niiden kuvaajia ei voida tarkastella erillisinä asioina, vaan ne muodostavat keskenään kommunikoivan systeemin. Tästä syystä kuvaajia ei voida tulkita ainoastaan graafisina esityksinä ja funktioita algebrallisina esityksinä, vaan niiden välillä liikuttaessa myös tiedon on siirryttävä algebrallisen ja graafisen ajattelun välillä.

Esimerkkinä algebrallisen ja graafisen ajattelun yhdistämisen tärkeydestä on Potgieterin ym. [30] tutkimus matemaattisen tiedon siirtämistä kemiaan. Ilman matematiikkaa olisi käytännössä mahdotonta tutkia tai havainnollistaa luonnontieteitä, kuten kemiaa. Kuitenkin kemiassa esiintyvä matematiikka tuottaa usein hankaluuksia oppilaalle, vaikka se ei matemaattisesti ajateltuna olisikaan vaikea ymmärtää. Sen osaaminen edellyttää usein kvantitatiivisia taitoja, jolloin matematiikan "työkaluja"pitäisi osata laajentaa kemian ongelmiin. Toisin sanoen oppilaan on osattava siirtää matematiikassa oppimiansa asioita uuteen, ei matemaattiseen, tilanteeseen. Esimerkkinä oppilas, joka menestyy algebrassa, mutta ei kemian oppitunnilla erota muuttujaa vakiosta.

Algebrallisilla taidoilla tarkoitetaan symbolisten esitystapojen käytön ja niiden muokkaamisen osaamista matematiikassa ja lisäksi kohdeaineen, tässä tapauksessa kemian, konseptien osaamista. Graafiset taidot ilmaisevat, miten oppilas osaa esittää algebrallisen asian graafisesti. Vaikeudet siirtää algebrallista osaamista graafiseen esitykseen saattavat johtua siitä, että matemaattisessa konseptuaalisessa ymmärryksessä on puutteita tai tietoa ei osata muuttaa kontekstista toiseen. [30]. Vaikka tässä on kyseessä tiedon siirtäminen matematiikasta kemiaan, samankaltaisia hankaluuksia on havaittu myös muissa tieteissä. Planinic ym. [26] mukaan tutkimuksissa on havaittu, että tiedon siirtäminen tehokkaasti onnistuu todennäköisimmin silloin, kun oppilas on nähnyt käytetyn prosessin ainakin kahdessa eri kontekstissa.

Mitä enemmän oppilaalla on proseduraalisia algebrallisia taitoja (prosessiperspektiivi), sitä menestyksekkäämmin hän osasi siirtää niitä kemiaan. Proseduraalinen tieto jollakin alalla ja sen soveltaminen toiseen, johtaa siihen, että omaksuu uutta proseduraalista tietoa. Tämä havaittiin selkeästi kemian ja matematiikan välillä, kun kyseessä oli algebrallisia tehtäviä. Vaikka oppilailla olikin hyvät ja yhtenevät algebralliset representaatiot kemiassa ja matematiikassa, heidän kykynsä siirtää näitä graafisiin representaatioihin oli heikkoa. Algebrallisen tiedon soveltaminen graafiseen tuotti vaikeuksia jo pelkästään matematiikassa. Oppilas saattoi esimerkiksi todeta täysin oikein, että funktio saa myös negatiivisia arvoja ja tämän jälkeen piirtää kuvaajan, jossa funktio ei mene lainkaan x-akselin alapuolelle. Graafiset representaatiot tuntuvat olevan irrallisia algebrasta, eivätkä oppilaat osaa muodostaa yhteyttä näiden välille. [30].

4.3 Kontekstin vaikutus tulkintaan

Tiedon siirtyminen on olennainen osa ongelmanratkaisussa, jossa konteksti onkin eri kuin mihin tulkitsija on tottunut. Kontekstin vaikutusta kuvaajien tulkinnassa on tutkittu monesti. Eri tieteen aloilla usein oletetaan, että kuvaajan tulkitsijalla on hallussaan matematiikan työkalut ja hän käyttää niitä uudessa kontekstissa, oli se sitten tuttu tai täysin uusi. Näin ei kuitenkaan aina tapahdu, vaan matematiikan tietojen siirtämisessä ja soveltamisessa esiintyy monenlaisia hankaluuksia. Tutkimuksissa on myös todettu, että vaikeudet kuvaajien tulkinnassa tai tuottamisessa, esimerkiksi fysiikassa, eivät välttämättä johdu matemaattisen tiedon puutteista. Usein oppilailla on tarvittavat matemaattiset työkalut, mutta se ei takaa, että niiden käyttäminen onnistuu, kun tarkastellaan kuvaajatehtäviä uudessa, erilaisessa kontekstissa. [17]. Toisaalta on myös muistettava, että kontekstin lisääminen matemaattiseen tehtävään kasvattaa sen vaikeustasoa, sillä ratkaisuprosessisssa on tällöin yksi askel enemmän: kontekstin tulkitseminen ja muuntaminen matemaattiselle kielelle. Välillä kontekstin lisääminen tehtävään taas näytti tekevän ratkaisusta intuitiivisemman ja näin ollen helpomman. Tiiviisti ilmaistuna hankaluudet tiedon siirtämisessä eri kontekstien välillä voidaan jakaa kolmeen eri kategoriaan: 1) oppilaalla ei ole sopivaa tietoa käytettäväksi, 2) tietoa on, mutta se ei aktivoidu tarkasteltavan tehtävän kohdalla tai 3) tieto aktivoituu, mutta sitä ei osata soveltaa tarkoituksen mukaisesti. [1, 26].

Oppilaan törmätessä kuvaajaan jossakin kontekstissa, joutuu hän pohtimaan, mitä lähestymistapaa ja mitä tietoja hän tilanteessa tarvitsee. Se, millaiset taidot aktivoituvat, riippuu kontekstista, oppilaan aiemmista representaatioista sekä kulttuurillisista odotuksista. Tämän lisäksi tietojen aktivoitumiseen vaikuttaa oppilaan kyky laajentaa osaamistaan toisesta kontekstista toiseen. Keskeistä on myös se, tapahtuuko tietojen kontekstista toiseen siirtämisen aikana oppimista eli voidaanko sen ajatella olevan tiedon uudelleen rakentamista/jäsentelyä eikä ainoastaan sen käyttämistä eri tilanteeseen.

Planinic ym. ovat tutkineet oppilaiden kuvaajien tulkintaa eri konteksteissa monessa eri artikkelissaan. He toteuttivat tutkimukset vuosina 2013 ja 2016 käyttämällä kolmen kysymyksen settejä, joissa oli rinnakkaisia kysymyksiä kolmesta eri aihealueesta - matematiikasta ilman kontekstia, fysiikasta sekä matematiikasta jossakin kontekstissa (ei fysiikka, esimerkiksi talous). Artikkelissa *Student reasoning about graphs in different context* [27] on esitelty heidän löytämiään pääpiirteitä oppilaiden kuvaajien tulkitsemisesta eri konteksteissa:

1. **Tulkitsemisstrategiat rinnakkaisissa tehtävissä eri kontekstissa ovat usein riippuvaisia sekä kontekstista että aihealueesta:** Oppilaat käyttivät erilaisia strategioita kuvaajien tulkitsemisessa

eri konteksteissa, vaikka tehtävät olivat keskenään hyvin samankaltaisia. Tämä saattaa olla seurausta siitä, että oppilas ei osaa siirtää tai soveltaa taitojaan aihealueesta toiseen. Toisaalta ongelmat saattavat johtua siitä, että koulussa eri oppiaineita opiskellaan hyvin erillisinä toisistaan, jolloin eri aihealueita lähestytään oppiaineelle tyypillisestä näkökulmasta.

2. **Fysiikan kysymyksissä tukeudutaan kaavoihin (usein vääriin sellaisiin):** Fysiikan tehtävissä tutkimuksessa huomattiin, että lähes jokainen oppilas yritti soveltaa jotakin kaavaa saadakseen vastauksen, vaikka kyseinen tapa ei olisikaan ollut kovinkaan tuottoisa. Esimerkiksi kulmakerrointa laskettaessa oppilaat tiesivät, että kiihtyvyys lasketaan kaavalla $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, mutta laskun edetessä siirtyivät käyttämään kaavaa $a = \frac{v}{t}$.

3. **Yleisissä tehtävissä (muu konteksti) käytetään luovempia strategioita kuin fysiikan tehtävissä:** Muun kontekstin tehtävät näyttivät aktivoivan oppilaiden kognitiivisia resursseja enemmän kuin fysiikan ja matematiikan tehtävät. Oppilaat käyttivät erilaisia strategioita ja osasivat soveltaa tietojaan kysymyksiin. Samanlaiset ratkaisustrategiat olisivat johtaneet oikeisiin lopputuloksiin myös fysiikan ja matematiikan tehtävissä, mutta oppilaat eivät silti toimineet vastaavasti näissä tehtävissä. Oppilaat siis vaikuttivat ajattelevan luovemmin ja keksivän ratkaisuja ongelmatilanteisiin paljon tehokkaammin.

4. **Kontekstista riippumatta hankaluudet, joita esiintyy, ovat samankaltaisia:** Tyypillisimmät virheet, kuten ikoninen sekaannus, kulmakertoimen ja kuvaajan arvon sekoittaminen sekä välin ja pisteen sekoittaminen, esiintyivät vastauksissa kaikissa kolmessa aihealueessa. Ne eivät kuitenkaan olleet yhtä yleisiä jokaisessa.

5. **Kulmakerroin on epämääräinen käsite - erityisesti sen laskeminen:** Oppilaiden perustelut sekä vastaukset olivat hyvin vajavaisia tehtävissä, joissa tarkasteltiin kuvaajien kulmakertoimia. Matematiikan kysymyksissä kulmakerroin vaikutti vastauksien perusteella hyvin epämääräiseltä käsitteeltä, joka kuvaa, kuinka jyrkkä suora on. Kvalitatiivisissa tehtävissä tämä tieto on usein riittävä, toisin kuin kvantitatiivisissa tehtävissä. Kulmakertoimen ymmärrys muissa konteksteissa oli vielä heikompaa. Kaikista eniten vaikeuksia aiheutti negatiivisen kulmakertoimen ymmärtäminen.

Kuten tuloksista havaitaan, oppilaat selvästi tarkastelevat kuvaajia kolmessa eri maailmassa: todellisessa maailmassa, fysiikan maailmassa sekä matematiikan maailmassa [37]. Jokaiseen maailmaan liittyy omat uskomuksensa sekä ominaisuutensa, jolloin oppilas ei ymmärrä hyödyntää esimerkiksi todellisen maailman toimintatapoja fysiikan kontekstiin. Fysiikan maailman ajatellaan olevan pullollaan yksityiskohtaisia sääntöjä ja kaavoja, joita voi käyttää vain tietyissä tilanteissa. Usein kaavamaisuus on täysin sekä oppilaan omaa, intuitiivista päättelyä että todellisen maailman ilmiötä vastaan. Todellisen maailman tilanteita oppilas pitää monimutkaisina ja hankalina tulkita, jolloin niitä on myös työläs analysoida. Matematiikan maailma perustuu muuttujiin ja vakioihin liittyviin kaavoihin ja sääntöihin. Kuvaajat eivät sisällä yksiköitä ja akselit kuvastavat vain x- ja y-arvoja, jolloin linkki todelliseen maailmaan jää kokonaan puuttumaan. Jokaisessa ympäristössä on omat norminsa, joita käyttämällä oppilas pyrkii ratkaisemaan ongelman. [17, 37].

Kun kuvaajien tulkitsemista on vertailtu fysiikan ja matematiikan välillä, on alettu pohtia, onko suuresta matematiikan määrästä fysiikan kursseilla haittaa fysiikan konseptuaalisen tiedon kehittymiselle. Woolnough [37] pohtii tutkimuksessaan jääkö oppilaille "tilaa" kehittää fysiikan konsepteja, sillä oppilaiden on jo valmiiksi siirrettävä paljon matemaattista tietoa ja taitoa fysiikan ongelmien ratkaisemiseksi. Konseptien sisäistäminen ei tapahdu sillä, että oppilaat yrittävät parhaansa mukaan parantaa algebrallisia ongelmanratkaisutaitojaan. Esimerkiksi Newtonin toiseen lakiin $F = ma$ liittyvät ongelmanratkaisutehtävät sisältävät usein vain numeerista ja algebraan perustuvaa yhtälönratkaisua. Fysiikkaa yhtälön taustalla ei tarvitse edes ajatella, jolloin linkki matemaattisten toimintojen ja fysiikan välillä jää puuttumaan.

Matemaattisen osaamisen soveltaminen uuteen kontekstiin vaatii myös, että oppilaalla on hyvät konseptuaaliset tiedot molemmista aiheista. Linkin puuttuminen saattaa siis viestiä heikosta konseptuaalisesta tiedosta fysiikassa. Osittain vaikeudet yhtäläisyyksien hahmottamisessa johtuvat siitä, että matematiikka on niin abstraktia. Fysiikassa kuvaajat kuvaavat jotakin konkreettista tilannetta, esimerkiksi matkaa ajan funktiona, jolloin kuvaajaa lähestytään maanläheisemmästä näkökulmasta, eikä matemaattista tietoa ymmärretä siirtää niiden tulkitsemiseen. [25].

5 Kulmakerroin

5.1 Kulmakertoimen määritelmä

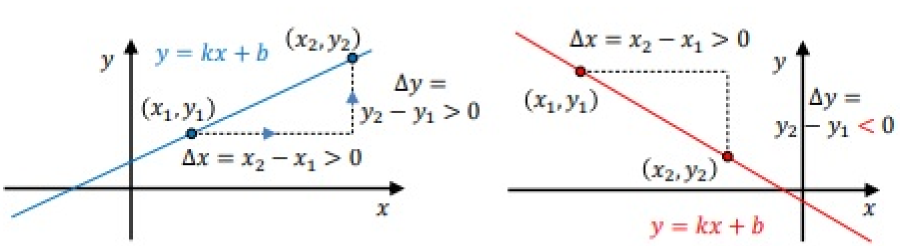
Matematiikassa kulmakerroin on kaksiulotteisessa koordinaatistossa y-koordinaatin muutoksen Δy ja sitä vastaavan x-koordinaatin muutoksen Δx suhde, joka kuvastaa suoran kaltevuutta. Kulmakerrointa merkitään yleensä kirjaimella

k ja se ilmaisee myös sen, onko suora nouseva vai laskeva. [15].

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

kun $x_1 \neq x_2$. [40].



Kuva 3: Kulmakertoimen määritelmä [40]

5.2 Kulmakerroin käsitteenä

Yleisesti matemaattinen käsite on usein esitettävissä monella eri tavalla. Tavallisimmin esittäminen onnistuu parhaiten esimerkkien sekä kuvien avulla. Stumpin [33] sekä Lingefjärdin & Farahanin [18] mukaan tavoitteena on, että käsitteestä muodostuisi mahdollisimman kattava kokonaisuus oppilaalle. Kattavalla kokonaisuudella tarkoitetaan sitä, että oppilaan representaatiot käsitteestä ovat monipuolisia ja hyvin toisiinsa linkittyneitä. Se, kuinka monta erilaista representaatiota oppilaalla on tietystä käsitteestä, on merkittävässä osassa siinä, kuinka hyvin hän osaa käyttää sitä ongelmanratkaisussa. Jotta ongelmanratkaisu olisi mahdollisimman tehokasta ja onnistunutta, representaatioiden pitää olla vahvasti ja oikein linkitettyjä toisiinsa. Tällöin oppilas pystyy vaihtamaan representaatiota tai näkökulmaa tarvittaessa, jopa tehtävän aikana.

Kulmakerroin on matematiikassa hyvin keskeinen käsite, jonka avulla voidaan kuvailla funktion (tai pelkän kuvaajan) käyttäytymistä. Sen avulla voidaan myös hahmottaa algebrallisen ja graafisen puolen yhtäläisyydet funktioiden ja niiden kuvaajien välillä. Käsitteenä kulmakerroin voidaan määritellä monella eri tavalla, riippuen siitä, mistä näkökulmasta sitä tarkastellaan. Kulmakertoimen hahmottaminen, ymmärtäminen sekä sen soveltaminen ovat yhteydessä juuri valittuun näkökulmaan. Se, ajatellaanko sen olevan esimerkiksi vain jokin geometrinen ominaisuus, jonka voi visuaalisesti havaita, vai ajatellaanko sen kuvaavan muuttujien välisiä suhteita, on näkökulman valinnasta riippuvaista. [32, 33]. Monissa tutkimuksissa [29, 32, 34, 38] on havaittu, että kulmakerroin on monille epämääräinen käsite ja usein oppilas ei osaakaan perustella, mitä kulmakertoimella tarkoitetaan. Vaarana tässä on se, että oppilas luulee kulmakertoimen olevan eri asia eri näkökulmasta perusteltuna. Esimerkkinä tästä tilanteet, joissa kuvaajan muutosnopeuden ei ajatella olevan sama asia kuin kuvaajan kulmakerroin tai kuvaajan jyrkkyyttä ei määritetä laskemalla kulmakertoimen arvo. Kulmakertoimen käsitteen moninaisuus ja hankaluus tulee esille myös silloin, kun se esiintyy muissa konteksteissa kuin matematiikassa. Vaikka oppilas osaisi hahmottaa kulmakertoimen funktion käyttäytymisen mittariksi, ei se näytä tarkoittavan, että hän ymmärtää kulmakertoimen esimerkiksi fysiikan tehtävässä, jossa tarkastellaan kiihtyvyyttä.

5.3 Kulmakerroin mittana - todellisen maailman tilanteet

Monet todellisen maailman tilanteet sisältävät kulmakertoimen käsitteen, mutta sen merkitys ja "abstraktius" vaihtelevat. Usein kulmakertoimen ajatellaan mittaavan jotakin. Stump [35] on keskittynyt tutkimuksessaan todellisen maailman tilanteisiin, joissa kulmakerroin esiintyy kahdenlaisissa tapauksissa. Nämä voidaan jakaa fysikaalisiin ja funktionaalisiin tilanteisiin. Fysikaalisissa tilanteissa, esimerkiksi mäet, kulmakerroin ajatellaan jyrkkyyden mittariksi. Funktionaalisissa tilanteissa, esimerkiksi hinnan muutoksissa ja aika vs. matka-kuvaajissa, kulmakerroin mittaa muutosnopeutta. Jotta oppilaille syntyisi konkreettinen ja ymmärrettävä käsitys kulmakertoimesta, on hyödyllistä käyttää todellisen maailman esimerkkejä. Niihin liittyvät representaatiot ovat oppilaalle helpompia ymmärtää ja omaksua itselleen. Ne kaikessa konkreettisuudessaan auttavat myös kulmakertoimen abstraktimman puolen sisäistämisessä. Vaikka todellisen maailman esimerkit helpottavat käsitteen omaksumista, ei voida olettaa, että oppilaat automaattisesti ymmärtävät kulmakertoimen mittaavan jotakin. Opettajan rooli on tässä keskeinen, sillä oppilas helposti luulee todellisen maailman esimerkkien olevan vain esimerkkejä, joiden avulla kulmakerroin voidaan kuvailla visuaalisesti. Ne yhdistyvät kokonaisuudeksi vain, jos oppilas tarkoituksen mukaisesti muodostaa yhteyksiä geometristen, algebrallisten sekä todellisen maailman representaatioiden välille [34].

Kummassakin tilanteessa oppilaiden hankaluudet liittyvät haparointiin kulmakertoimen määritelmän ja käsitteen saralla. Kun kulmakerrointa käytetään jyrkkyyden mittarina, huomataan, että oppilas ei konkreettisesti ymmärrä, mitä kulmakerroin ilmaisee. Esimerkiksi vertailtaessa kolmea eri hiihtoramppia, oppilas ei osannut yhdistää suurinta kulmakerrointa jyrkimpään ramppiin. Myös kuvaajan ja akselin välinen kulma ja kulmakerroin sekoitetaan. Funktionaalisissa tilanteissa oppilaiden hankaluudet johtuvat siitä, että kulmakerroin on näissä tehtävissä abstraktimpi. Se ei enää kuvaakaan mitään konkreettista, kuten jyrkkyyttä, jolloin on sen laskemisen lisäksi osattava hahmottaa, mitä se kuvaa. Kaikista intuitiivisin tapaus funktionaalisesta tilanteesta on "rate of growth-problem", jossa jokin kasvaa/lisääntyy ajan suhteen. Vaikka tapaus onkin intuitiivinen ja oppilas osaa ratkaista muutosvauhdin, hän ei välttämättä ymmärrä asiaa graafisesti. [35].

Vaikka kulmakerroin kuvaa edellä mainituissa tilanteissa hyvin erilaista asiaa, Stumpin [35] mukaan ei voida sanoa, kumman osaamisesta olisi enemmän hyötyä matematiikan ulkopuolisissa konteksteissa. Vahva kulmakertoimen ymmärrys sisältää kyvyn osata käyttää molempia sujuvasti. Oppilaita pitäisikin rohkaista ajattelemaan, mitä kulmakerroin edustaa kussakin kontekstissa, jolloin heille syntyy käsitys, mitä eroja ja yhtäläisyyksiä tilanteissa on. Oppilaan olisi samalla hyvä nähdä, miltä erilaiset vuorovaikutussuhteet näyttävät graafisesti. Näin hän pystyy vertailemaan tilanteita ja luomaan omia representaatioita erilaisista todellisen maailman konteksteista. Tämä luo oppilaalle pohjan kulmakertoimen konseptuaalisesta ymmärryksestä.

5.4 Näkökulmia kulmakertoimesta

Stumpin [33] tutkimuksen perusteella kysymyksen ”Mikä on kulmakerroin?” vastauksissa esiintyi kaikista eniten geometrisia tulkintoja. Kulmakerroin tulkittiin siis kahden pisteen välisenä suhteena eli nousuna suhteessa matkaan. Toisena yleisenä näkökulmana oli funktionaalinen näkökulma: kuinka paljon toisen muuttujan arvot muuttuvat, kun toinen muuttuja muuttuu tietyn määrän (esimerkiksi $x = 3y$). [32, 34]. Stanton [32] pohtii tutkimuksessaan, että geometrisen tulkinnan yleisyys johtuu oletettavasti siitä, että kulmakertoimen opetuksessa ja tulkinnassa keskitytään pisteiden sijoittamiseen koordinaatistoon sekä kuvaajien piirtämiseen, jolloin kulmakerroin helposti ajatellaan geometrisena ominaisuutena. Stump [33, 34] on päätynyt tutkimuksissaan samoihin päätelmiin.

Planinic kollegoineen [25, 26, 27, 28, 29] on tutkinut kulmakertoimen ymmärrystä eri näkökulmista, sillä se on tärkeä konsepti matematiikassa ja sen osaamista edellytetään monilla muillakin kentillä. Matematiikassa esimerkkinä differentiaali- ja integraalilaskenta, jossa teoriatausta ja kaavat pohjautuvat kulmakertoimeen (gradienttiin). Fysiikassa ja kemiassa kulmakerroin on myös keskeinen, sillä sen avulla on mahdollista esittää muuttujien välisiä suhteita ja luoda niistä kaavoja. Esimerkkejä gradienteista fysiikassa ja kemiassa ovat nopeus, kiihtyvyys sekä reaktionopeus. Kulmakerrointa käytetään myös monilla muilla tieteen aloilla sekä todellisessa maailmassa, kuten taloudessa. Kaikissa aiheissa kulmakerroin pohjimmiltaan kuvaa samaa asiaa, vain sen tarkastelunäkökulma saattaa olla erilainen. Juuri tämän vuoksi vaarana on, että tulkitsija/oppilas ei ymmärrä, että kyse on jokaisessa eri kontekstissa täysin samasta asiasta.

Ensimmäinen askel kulmakertoimen ymmärtämisessä Planinicin ym. [25] mukaan on ymmärtää, että kuvaaja on symbolinen representaatio kahden muuttujan välisestä suhteesta. Kun tämän asian hahmottaa, on mahdollista ymmärtää, mitä kulmakerroin kuvastaa kussakin tilanteessa. Kulmakertoimen laskeminen yhdistyykin loogiseen päättelyyn, avaruudelliseen hahmotuskykyyn sekä aiempiin matemaattisiin "saavutuksiin", kuten jo kuvaajien tulkitsemisen kohdalla todettiin. Aiemmilla matemaattisilla saavutuksilla tarkoitetaan oppilaan representaatioita aiheesta: millaisia kognitiivisia rakenteita hänelle tulee mieleen käsitteestä sekä miten hän kuvailisi käsitettä. Tässä tapauksessa on otettava huomioon sekä geometriset että algebralliset representaatiot sekä ennen kaikkea niiden yhdistyminen. [34]. Oppilaan tulee siis osata yhdistää geometriset aspektit, kuten koordinaatisto, pisteiden sijoittaminen ja kuvaajan piirtäminen, algebrallisiin aspekteihin, kuten muuttujat, kaavat ja yhtälöiden ratkaiseminen. [32, 34].

Juuri edellä mainittu kyky liitetään kulmakertoimen konseptuaaliseen tietoon. Se sisältää ymmärryksen eri representaatioiden välisistä suhteista sekä ymmärryksen kulmakertoimesta jyrkkyyden ja muutosvauhdin mittana todellisen maailman tilanteissa. Proseduraalinen tieto kulmakertoimesta sisältää toiminnot ja säännöt sen laskemiseksi. Oppilas siis osaa käyttää tarvittavia symboleita, kuten m yhtälöstä $y = mx + b$ ja kaavoja, kuten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Näitä taitoja yhdistelemällä oppilaalla on kattava käsitys kulmakertoimesta ja hän osaa soveltaa sitä eri konteksteissa. [34].

Tutkijat ovat havainneet, että mitä vähemmän matemaattista tietoa tulkitsijalla on, sitä useammin kulmakertoimen ajatellaan kuvastavan jyrkkyyttä. Tämä on melko intuitiivista, sillä se on visuaalisesti helppo hahmottaa. Kvalitatiivisesti tarkasteltuna tämä tulkinta usein onkin täysin riittävä, mutta se ei riitä suoriutumaan kvantitatiivisista tarkastelua vaativista ongelmista. Kvantitatiivisissa kulmakerrointehtävissä matemaattisen proseduurin hallitseminen on välttämätöntä. Kuitenkin on myös mahdollista, että matemaattisen kaavan osaaminen ja ulkoa muistaminen häiritsee tulkitsijan loogista päättelyä. Jos tulkitsija nojautuu liikaa kulmakertoimen matemaattiseen kaavaan, jonka liittää kyseiseen tapaukseen, hän samalla tulee poissulkeneeksi loogisen ajattelun ja maalaisjärjen. Suurimmassa osassa tällaisista tapauksista päädytäänkin väärään lopputulokseen, vaikka tehtävä olisikin ollut ratkaistavissa täysin järkeilemällä. Maalaisjärki ei kuitenkaan aina auta, sillä siinä keskitytään liiaksi konkretiaan. Konkreettiseen näkökulmaan keskittyminen estää oppilasta ajattelemasta formaalisti, jolloin kuvaaja tulkitaan pelkkänä visuaalisena kuvana [25]. Tällöin kulmakerroin esimerkiksi sekoitetaan kuvaajan (tai pisteen) korkeuteen. Kuvaajaa tulkitaan ennemminkin jonakin konkreettisena asiana kuin abstraktina ja informaatiota sisältävänä, jolloin kulmakertoimen edustama asia jää aivan merkityksettömäksi. [4, 29, 33, 34].

Planinic ym. [25] tutki oppilaiden kulmakertoimen ymmärtämistä matematiikassa sekä fysiikassa. Oppilaat menestyivät paremmin tehtävissä, joissa matematiikkaa ei tarvinnut soveltaa erilliseen kontekstiin. Tämä on loogista, sillä esimerkiksi fysiikan tehtävissä oppilaan tarvitsee osata soveltaa matemaattista tulosta fysiikan kontekstiin. Matemaattinen osaaminen ei siis takaa sitä, että tietoa osaisi soveltaa erilaiseen aihealueeseen. Matematiikan osaamattomuus ei ole pääsyy sille, että kulmakertoimen määrittäminen on oppilaille hankalaa fysiikassa ja muissa oppiaineissa [25]. Christensen & Thompson [4] sekä Planinic kumppaneineen [25, 26, 29]) havaitsivat oppilaiden käyttävän erilaisia keinoja kuvaajien tulkitsemisessa matematiikassa ja fysiikassa. Ongelmaa lähdetään alusta alkaen lähestymään eri tavalla, jolloin matematiikan osaaminen jää varjoon. Tämä johtuu siitä, että linkki matemaattisen ja fysikaalisen maailman välillä puuttuu.

6 Ongelmakohtia kuvaajien tulkinnassa ja kulmakertoimen määrittämisessä

Virheitä, joita kuvaajien tulkinnassa ja kulmakertoimen määrittämisessä tapahtuu, on tutkittu monesti. Tutkimuksien perusteella on havaittu, että oppilailla on samankaltaisia ongelmakohtia ja virheitä tulkinnassa iästä riippumatta.

6.1 Hankaluudet käsitteessä

Käsitekuvalla (the concept image) tarkoitetaan kokonaista kognitiivista rakennelmaa, joka liittyy kyseessä olevaan käsitteeseen [33]. Se sisältää kaikki mentaaliset kuvat sekä siihen liittyvät ominaisuudet ja prosessit, toisin sanoen siis sekä sisäiset että ulkoiset representaatiot. Käsitekuva on rakentunut ja muokkautunut ajan kuluessa sen oppimiseen ja käyttämiseen liittyvien kokemuksien tuloksena. Käsitteen oikea ja vahva määrittely taas luo pohjan rakentaa tietoja kyseisestä asiasta. Tästä syystä ongelmat kuvaajien tulkitsemiseen liittyen juontavatkin juurensa käsitteiden hallintaan. Ongelmat lähes aina joko johtuvat matemaattisten käsitteiden huonosta ymmärtämisestä tai rajoittavat luonnontieteellisten käsitteiden oppimista. [5, 22].

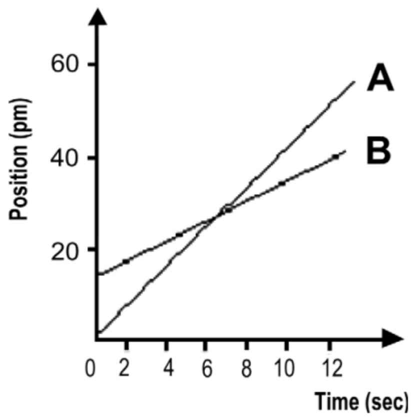
Tutkijat, kuten Stump [33], ovat huomanneet, että oppilaiden käsitys kulmakertoimesta käsitteenä on usein epämääräinen. Tämä yleensä johtuu siitä, että oppilaat eivät osaa yhdistää siihen liittyviä erilaisia representaatioita eivätkä ymmärrä kulmakertoimen ja muutosvauhdin yhteyttä. Kappaleessa 5.2 lueteltiin erilaisia näkökulmia kulmakertoimen tarkasteluun, mistä selkeästi käytetyin on geometrinen tulkinta. Kun kulmakerroin ajatellaan geometrisesti ilman sen yhdistämistä muihin representaatioihin, jää se helposti irralliseksi ominaisuudeksi ja sen merkitystä ei ymmärretä. Tällöin myös matemaattinen ymmärrys on vajavaista.

6.2 Virheet tehtävissä

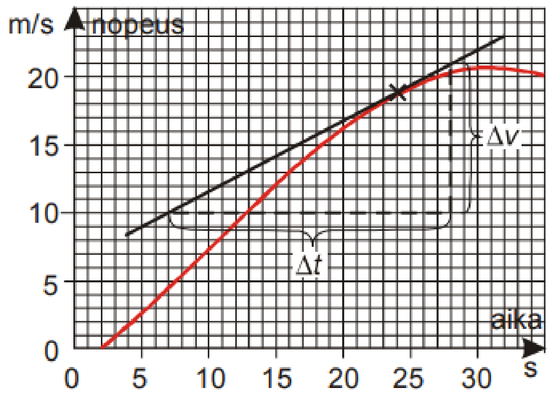
Kriittisin ongelmakohta kuvaajien tulkitsemisessa on kuvaajan tulkitseminen kuvana, sillä se vaikuttaa tulkinnan onnistumiseen niin monella tavalla [1, 19, 27]. Kuvaaja siis tulkitaan objektina tai liikkeen kuvana, jolloin oppilas luulee kuvaajan esittävän kirjaimellisesti jotakin tilannetta tai liikettä. Vaikka kuvaajan tulkitsisi kuvana, se ei estä yksittäisten pisteiden määrittämistä. Tämä johtaa siihen, että pisteitä sekä peräkkäisiä arvoja ei pystytä yhdistämään kuvaajan esittämään asiaan. Esimerkiksi kävelijän liikettä esittävän aika-nopeus -kuvaajan käyrä tulkitaan kävelijän reitiksi. Siitä seuraa, että vaakasuorat osiot tulkitaan liikkeen pysähtymisenä. Tällöin on täysin mahdotonta ymmärtää kuvaajan muita ominaisuuksia, esimerkiksi kulmakerrointa kiihtyvyytenä.

Kuvaajan tulkitseminen kuvana johtaa osittain myös käsitykseen, jossa kulmakertoimen arvon ajatellaan muuttuvan kuvaajan arvojen muuttuessa [27]. Kulmakertoimen käsitteen ja kuvaajan korkeuden välillä tapahtuu sekaannus ja oppilas sujuvasti sekoittaa kaksi täysin eri asiaa keskenään. Sekaannuksia on havaittu esiintyvän niin kvantitatiivisissa kuin kvalitatiivisissakin tehtävissä kaiken ikäisillä. Muutosnopeuden kvantitatiivinen määrittäminen tarkoittaa kulmakertoimen matemaattista määrittämistä. Esimerkiksi, jos oppilaalta kysytään kulmakertoimen arvoa pisteessä $t = 2$, hän ajatteleekin, että kulmakerroin on funktion arvo tässä pisteessä (eli kuvaajan korkeus). Virheitä esiintyy kaikista eniten tilanteissa, jossa kuvaaja ei esitä matemaattista funktiota. Oppilas ei osaa yhdistää tilannetta matemaattisiin tietoihinsa ja taitoihinsa. Kvalitatiivisessa kulmakertoimen tulkinnassa on kyse muutosnopeuden ja suoran jyrkkyyden välisen yhteyden ymmärtämisestä. Todellisen maailman tilanteet sisältävät tämän kaltaisia tehtäviä, joissa helposti jätetään huomioimatta akselien muuttujat ja muutosnopeutta koskeviin kysymyksiin vastataan arvon muutoksien mukaan. Tämä saattaa osittain johtua siitä, että kulmakertoimen käsitettä käytetään todellisen maailman tilanteissa eri tavalla. Toisaalta tässäkin tapauksessa syy virheelliseen tulkintaan on matemaattisen tiedon soveltamisen puute. [4, 27]. Fysiikassa virhe ilmenee esimerkiksi paikka-aika-kuvaajissa, kun pitäisi määrittää kappaleen nopeus. Kuvaajan korkeuden ajatellaan ilmaisevan nopeutta, jolloin kulmakerroin jätetään kokonaan huomioimatta [8, 19]. Sama ajattelutapa esiintyy myös tilanteissa, jossa oppilas luulee, että suoran kulmakerroin ei ole vakio.

Glazerin tutkimuksessa [7] esimerkkinä sekaannuksesta on kuva 4, jossa on paikka-aika-koordinaatistossa kuvattuna kaksi objektia suorilla, jotka leikkaavat toisensa. Objektien nopeudet eivät ole missään kohtaa samat, sillä suorien kulmakertoimet eivät ole samat. Kuitenkin kun oppilailta kysyttiin "Liikkuvatko objektit A ja B missään kohtaa samalla nopeudella?", moni vastasi nopeuksien olevan samat suorien leikkauspisteessä.



Kuva 4: Kulmakerroin ja kuvaajan arvo sekoitetaan [7]



Kuva 5: Hetkellinen kiihtyvyys oikein laskettuna [39]

Kulmakertoimeen liittyy muitakin hankaluuksia. Glazer [7] ja Planinic ym. [27] ovat havainneet, että kulmakerrointa määritettäessä oppilas sekoittaa välin ja pisteen merkitykset. Välin ja pisteen merkitys sekoittuu, kun oppilas laskee $\frac{y}{x}$, eikä käytä jotakin väliä $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tälläisiä virheitä esiintyy esimerkiksi tehtävissä, joissa vertaillaan kahden populaation kasvua tai pitäisi määrittää hetkellinen kiihtyvyys tv-kuvaajalta. Kuvassa 5 lasketaan hetkellinen kiihtyvyys kohdassa $t = 24$ oikein, laskemalla tangentin kulmakerroin. Välin ja pisteen merkityksen sekoittava oppilas ratkaisisi kyseisen tehtävän laskemalla $\frac{19\frac{m}{s}}{24s}$.

Kolmas yleinen virhe kulmakertoimeen liittyen on se, että x- ja y-arvot menevät laskettaessa väärinpäin. Kulmakerroin siis lasketaankin $k = \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Tämä voi johtua monesta eri asiasta, esimerkiksi kaava tai akselien paikat muistetaan väärin. Akselien nimeäminen eri tavalla kuin kaavassa (esim. tv-koordinaatisto) lisää virheen riskiä. Tämän lisäksi kuvaajan ja kulmakertoimen ominaisuuksien hahmottaminen tuottaa oppilaille hankaluuksia. Esimerkiksi se, miten kulmakertoimen positiivisuus tai negatiivisuus vaikuttaa suoran käyttäytymiseen. Päättely kulmakerrointehtävissä perustuu usein siihen, miltä kuvaaja näyttää. Jos y-arvot vähenevät x-arvojen kasvaessa, oppilas muistaa, että kyseessä on negatiivinen kulmakerroin. Päättely voi näillä tiedoilla mennä oikein, mutta usein tästä seuraa käsitys, että myös kulmakerroin muuttuu arvojen muuttuessa. Toisaalta ei myöskään ymmärretä, että kulmakertoimen arvo 3 tarkoittaa sitä, että kun y-akselin arvo muuttuu 3 yksikköä, niin x-akselin arvo muuttuu vain yhden yksikön verran, jolloin lineaarisen suoran kulmakerroin pysyy vakiona. [25, 29, 33].

Matematiikan ulkopuolisessa kontekstissa hankaluuksia aiheuttaa yksiköiden merkitseminen. Vaikka luonnontieteiden (esim. fysiikka ja kemia) opinnoissa yksiköiden merkitystä korostetaan, todella moni jättää kulmakerrointa määrittäessään yksiköt pois. Oppilaat kyllä ymmärtävät yksiköiden merkityksen tai ainakin vähintään muistavat, että niiden käyttämistä korostetaan, joten sen laittamatta jättäminen ei niinkään kerro fysiikan taidoista. Woolnough [37] selittääkin, että yksiköiden käyttäminen kulmakerrointehtävässä ei oppilaiden mukaan tunnu luontevalta. Kulmakertoimen ajatellaan olevan matemaattinen konsepti ja matematiikassa oppilaat eivät olleet tottuneet käyttämään yksiköitä. Matematiikan kulmakerrointehtävät sijoittuvat yleensä xy-koordinaatistoon, jossa akseleilla ei ole yksiköitä. Oppilaat myös kokevat, että fysiikan tehtävän yksiköt sekoittavat heitä, jolloin on helpompi ratkaista tehtävä ilman.

6.3 Linkin puuttuminen

Kuvaajat ja kulmakerroin ovat vain esimerkkejä aihealueista, joiden soveltaminen matematiikasta sen ulkopuolisiin konteksteihin aiheuttavat vaikeuksia. Kaikki näihin liittyvät ongelmat pohjautuvat siihen, että linkki eri aineiden väliltä jää puuttumaan. Linkkien luomiseen on keskityttävä aiempaan tarkemmin, jotta ongelmat tiedon siirtämisessä vähenisivät. Tällöin oppilaallekin tulisi selväksi, että matematiikkaa ei opiskella ainoastaan sen takia, että osaisi matematiikkaa, vaan siksi, että osaa tulkita ja ymmärtää myös ympäröivää maailmaa.

Miten linkkejä voisi luoda?

- Koetöissä, varsinkin fysiikassa ja kemiassa, pitäisi käyttää yksinkertaisia välineitä kuvaamaan yksinkertaisia tilanteita, jolloin oppilas voi helposti nähdä, miten työ liittyy oikeaan tilanteeseen [37].

- Fysiikan tai kemian (myös muut aineet) käsite tai kaava pitäisi rakentaa graafisesta datasta lähtien. Tuotettua dataa tulkitsemalla pitäisi pystyä johtamaan kelvollinen kaava kuvaamaan tilannetta [37].

- Oppilaan ei voi olettaa huomaavan yhteyttä datan ja kaavan välillä, jos data ei sovi kaavaan [37].

- Töiden pitää olla riittävän helppoja ja yksinkertaisia, jotta data yhdistyy oikean maailman tilanteeseen ja oppilas oivaltaa yhteyden [37].

- Esimerkkejä kulmakertoimesta tarkasteltaessa on annettava oppilaalle mahdollisuuksia tutkia sekä fysikaalisia että funktionaalisia tilanteita ja rakentaa yhtäläisyyksiä ja eroja niiden välille [35].

- Opetuksessa tulee rohkaista oppilasta pohtimaan, mitä kulmakerroin kussakin tilanteessa edustaa ja miten erilaiset tilanteet liittyvät toisiinsa [34].

- Kaavojen käyttöön tukeutumisen lisäksi, oppilasta tulisi haastaa ajattelemaan kokonaisuutta jokaisessa kuvaajiin liittyvässä kontekstissa [34].

- Esimerkkejä kuvaajista ja kulmakertoimesta tulisi esittää mahdollisimman laajasti myös todellisen maailman tilanteista (talous, uutiset), jolloin niiden väliset erot ja yhtäläisyydet tulisivat selviksi ja ne osattaisiin perustella matemaattisesti [28].

7 Pohdintaa

Kuvaajien tulkinta on osa joka päiväistä elämää, sillä niiden avulla on helppoa ja yksinkertaista esittää informaatiota. Kuitenkaan kuvaajien tulkitseminen ei ole yhtä yksinkertaista. Tästä syystä tulkitsemistaitoihin on kiinnitettävä huomiota kouluissa.

Tässä tutkielmassa oli tarkoitus selvittää, millaisia taitoja kuvaajien tehokkaaseen tulkitsemiseen tarvitaan sekä minkälaisia ongelmia oppilailla on niiden tulkinnassa. Asiaa lähestyttiin sekä matemaattisen tiedon (proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto) että tiedon siirtämisen näkökulmasta. Yksi yleisimmin toistuva ongelma kuvaajien tulkitsemisessa on se, että matemaattisen tiedon ja käytännön esimerkkien välillä ei nähdä yhteyttä. Matemaattista tieoa ei osata eikä edes ymmärretä soveltaa käytäntöön. Oppilas ei myöskään osaa lähestyä kuvaajaa esimerkiksi fysiikan oppitunnilla matematiikasta tutulla tavalla, vaan hän on hyvin kiinnittynyt fysiikasta tuttuihin ja turvallisiin proseduureihin. Toisaalta kuvaajat konteksteissa, jotka eivät liity luonnontieteisiin, saavat oppilaat käyttämään luovempia ratkaisustrategioita. Tämä johtuu siitä, että oppilaalla ei ole olemassa tarkkoja kaavoja, joihin tukeutua, vaan hän pohtii asiaa maanläheisemmästä näkökulmasta. Muita mahdollisia syitä ongelmiin havaittiin olevan konseptuaalisen tiedon puute joko matematiikassa tai kohdealassa sekä kuvaajan tulkitseminen kuvana. Pohjimmiltaan suurin osa ongelmista kuvaajissa pohjautuivat juuri kuvamaiseen tulkintaan.

Kulmakerroin on keskeinen asia kuvaajiin liittyvien sovellutusten yhteydessä ja juuri siitä syystä sen ymmärrystä on tutkittu melko paljon. Tutkimuksissa käy ilmi, että kulmakertoimen käsite on oppilaille usein hyvin epämääräinen ja sen merkitystä ei kokonaan ymmärretä. Oppilas saattaa osata laskea kulmakertoimen arvon, mutta se jää irralliseksi osaksi kuvaajan luomasta kokonaisuudesta. Tämä huomataan selkeimmin, kun kulmakerrointa ratkaistaan matematiikan ulkopuolisissa tehtävissä. Esimerkiksi yksiköiden käyttäminen kulmakertoimen arvon perässä tuntuu opppilaista kummalliselta tai sen ei ymmärretä merkitsevän kiihtyvyyttä tv-koordinaatistossa. Myös puhtaasti matemaattisissa tehtävissä on hankaluuksia, kuten kuvaajan arvon ja kulmakertoimen arvon käsitteen sekoittaminen. Tällöin suoran kulmakertoimen ei ymmärretä pysyvän vakiona. Kulmakertoimen ja kuvaajan arvon väliset sekaannukset juontavat juurensa varmasti arkielämään, jossa kulmakertoimella saatetaan tarkoittaa eri asiaa. Kulmakerroin jo sanana viittaa kulmaan ja kaltevuuteen, joten oppilaille saattaa muodostua väärä käsitys asiasta "vahingossa". Kaltevuuteen liittyvät representaatiot onkin havaittu liittyvän matemaattisesti heikompien oppilaiden kuvauksiin kulmakertoimesta, jolloin jokin yhteys intuitioon siinä on oltava.

Kuvaajien esittämät asiat sekä käsitteet, joita ne sisältävät, tuntuvat olevan oppilaille hyvin oppiainesidosteisia ja niiden tulkitsemiseksi on jokaisessa aineessa omat prosessinsa. Tutkimuksissakin on havaittu, että tämä johtaa linkkien puuttumiseen sekä oppilaan omien representaatioiden väliltä että matematiikan ja muiden tieteiden väliltä. Opettajan käyttämillä representaatioilla on suuri merkitys siinä, millaisia representaatioita oppilaalle syntyy. Erityistä huomiota vaatii eri representaatioiden yhdistäminen toisiinsa, jolloin oppilaalle jää käsitys, että esimerkiksi kulmakerroin kertoo kuvaajan muutosnopeuden tai jyrkkyyden. Opetuksessa tulisi tämän lisäksi keskittyä luomaan matematiikasta perusteita muiden tieteiden matemaattiseen ongelmanratkaisuun sekä työkaluja arkielämän tilanteisiin. Opetuksen tulisi olla monipuolista, jossa erityyppisiä kuvaajia tarkastellaan, tulkitaan ja piirretään. Tällöin oppilaalle syntyy kattava kokonaiskuva kuvaajille tyypillisistä piirteistä ja ominaisuuksista ja hän osaa soveltaa tietojaan erilaisiin konteksteihin.

Viitteet

[1] R. Beichner: *Testing Student Interpretation of Kinematics Graphs.* American Journal of Physics, 62(8). 1994.

[2] J. Boaler: *Participation, Knowledge and Beliefs: A Community Perspective on Mathematics Learning.* Educational Studies in Mathematics, 40(3), 259-281. 1999.

[3] H. Brasell & M. Rowe: *Graphing skills among high school physics students.* School science and mathematics, 93(2), 63-70. 1993.

[4] W. Christensen & J. Thompson: *Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context.* Physical review physics education research, 8(2). 2012.

[5] J. Claude: *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* 1987.

[6] S. Friel, F. Curcio, G. Bright. *Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications.* Journal for Research on Mathematics Education, 32(2), 124-158, 2001.

[7] N. Glazer: *Challenges with Graph Interpretation: A Review of the Literature.* Studies in Science Education, 47(2), 183-210. 2011.

[8] T. Graham & J. Sharp: *An Investigation into Able Students' Understanding of Motion Graphs.* Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 18(3), 128-135. 1999.

[9] E. Gray & D. Tall: *Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics.* PME conference, 3, 3-65. 2001.

[10] L. Haapasalo: *Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää.* Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, 2, 50-83. 2004.

[11] L. Haapasalo & D. Kadijevich: *Two types of mathematical knowledge and their relation.* Journal für Mathematik-Didaktik, 21(2), 139-157. 2000.

[12] S. Hattikudur, R. Prather, P. Asquith, M. Alibali, E. Knuth & M. Nathan: *Constructing graphical representations: middle schoolers' intuitions*

and developing knowledge about slope and y-intercept. School science and mathematics, 112(4), 230-240. 2012.

[13] M. Hähkiöniemi: *The role of representations in learning the derivative.* University of Jyväskylä. 2006.

[14] J. Joutsenlahti: *MATEMAATTINEN AJATTELU JA KIELI - mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa.* Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä: Hämeenlinnan normaalikoulu, 3-12. 2003.

[15] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela & J. Tahvanainen: *Pitkä matematiikka 4: Analyyttinen geometria.* Werner Söderström Osakeyhtiö, ensimmäinen painos, 56-63. 2005.

[16] S. Koskinen: *Kuvaajien kvalitatiivinen tulkitseminen: yleisimmät virhekäsitykset, tulkintaan vaikuttavat tekijät ja kuvaajien opetuskäyttö.* University of Turku. 2016.

[17] G. Leinhardt, O. Zavlasky & M. Stein: *Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching.* Review of Educational Research, 60(1), 1-64. 1990.

[18] T. Lingefjard & D. Frahani: *The elusive slope.* International Journal of Science and Mathematics Education, 16(6), 1187-1206. 2018.

[19] L. McDermott, M. Rosenquist & E. van Zee: *Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics.* American Journal of Physics, 55(503). 1987.

[20] J. McKendree, C. Small, K. Stenning & T.Conlon: *The role of representation in teaching and learning critical thinking.* Educational review, 54(1), 57-67. 2002.

[21] C. Nagle, D. Moore-Russo, J. Viglietti & K. Martin: *Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: A comparison across academic levels.* International Journal of Science and Mathematics Education, 11(6), 1491-1515. 2013.

[22] C. Nagle & D. Moore-Russo: *The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content.* Investigations in Mathematics Learning, 6(2). 2013.

[23] Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. https://www.oph.fi. 2014.

[24] R. Panasuk. *Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations*. Education 131(2). 2010.

[25] M. Planinic, A. Susac, Z. Milin-Supus, H. Katic & L. Ivanjek: *Comparison of student understanding og line graph slope in physics and mathematics*. International Journal of Science and Mathematics Education, 10(6), 1393-1414. 2012.

[26] M. Planinic, L. Ivanjek, A. Susac & Z. Milin-Supus: *Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts*. Phys. Rev. Phys. Educ. Res., 9(2). 2013.

[27] M. Planinic, L. Ivanjek, A. Susac, A. Andrasevic & Z. Milin-Supus: *Student reasoning about graphs in different context*. Phys. Rev. Phys. Educ. res., 12(1). 2016.

[28] M. Planinic, L. Ivanjek, M. Hopf & A. Susac: *Student difficulties with graphs in different contexts*. Cognitive and Affective Aspects in Science Education Research, 167-178. 2017.

[29] M. Planinic, A. Susac, A. Bubic, E. Kazotti & M. Palmovic: *Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and nonphysics students*. Phys. Rev. Phys. Educ. Res, 14(2). 2018.

[30] M. Potgieter, A. Harding & J. Engelbrecht: *Transfer of algebraic and graphical thinking between mathematics and chemistry*. Journal of Research in Science Teaching, 45(2), 197-218. 2008.

[31] W. Roth & M.K. McGinn: *Graphing: Cognitive ability or practice?*. Science education, 81, 91-106. 1996.

[32] M. Stanton & D. Moore-Russo: *Conceptualizations of slope: A review of state standards*. School science and mathematics, 112(5), 270-277. 2012.

[33] S. Stump: *Secondary mathematics teachers' knowledge of the concept of slope*. Non-Journal. 39 pages. 28.3.1997.

[34] S. Stump: *Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope*. The Journal of Mathematical Behavior, 20(2), 207-227. 2001a.

[35] S. Stump: *High school precalculus students' understanding of slope as a measure*. School science and mathematics, 101(2), 81-89. 2001b.

[36] H. Wainer: *Understanding Graphs and Tables*. Educational Researcher, 21(1), 14-23. 1992.

[37] J. Woolnough: *How students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics?*. Research in Science Education, 30(3), 259-267. 2000.

[38] O. Zaslavsky, H. Sela & U. Leron: *Being sloppy about slope: The effect of changing the scale*. Educational Studies in Mathematics, 49(1), 119-140. 2002.

[39] Hetkellinen kiihtyvyys:
https://peda.net/rauma/rauman-lukio/oppiaineet/mafyke/tapiovaara-janne/fysiikan-kurssit/vanha-ops/kr/4-kurssi:file/download/02e53305da1957c218753c60866d6f8b79e0696e/Fysiikka_4_kertaustehtavien_ratkaisut.pdf

[40] Suoran kulmakerroin ja suuntakulma:
https://peda.net/sievi/sievin-lukio/oppiaineet2/mp/m5ag/tkapp/luku-3-12:file/download/f1b349a74c3ecdfdb90126181cd53b988a031794/Analyyttinen_Geometria_MAA5_LUKU3.1.pdf